UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Klausurvorbereitungsblatt

---

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

(i) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x+5}\,\mathrm{d}x$, (v) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,\mathrm{d}x$, (ix) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x$,

(ii) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+7}{x+5}\,\mathrm{d}x$, (vi) $\displaystyle\int (5x^4+4x^3)\mathrm{e}^{x^5+x^4}\,\mathrm{d}x$, (x) $\displaystyle\int x^{-2}\sin x^{-1}\,\mathrm{d}x$,

(iii) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$, (vii) $\displaystyle\int x^2 \log x\,\mathrm{d}x$, (xi) $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$,

(iv) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{3x}+5}\,\mathrm{d}x$, (viii) $\displaystyle\int \frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, (xii) $\displaystyle\int x^2 \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

2. Sei

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4) : x = 0,\ y + 2z + 4t = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$. Finden Sie eine Basis für W und bestimmen Sie somit $\dim W$. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis für $\mathbb{R}^4$ und finden Sie somit ein Komplement von W in $\mathbb{R}^4$.

3. Zeigen Sie, dass

$$\{x^3 + x^2, x^3 + x\}$$

eine Basis für den Unterraum

$$W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(0) = 0\}$$

von $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie somit $\dim W$. Ergänzen Sie diese Basis zu einer Basis für $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ und finden Sie somit ein Komplement von W in $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

4. Seien $\mathcal{B}$ die Standardbasis für $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für $\mathbb{R}^3$ und $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildungen mit

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ -x_3 - x_1 \end{pmatrix}, \qquad S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(T)$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(S)$.

5. Sei

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{31}, E_{32}, E_{33}\}$$

die Standardbasis für $\mathbb{R}^{3\times3}$

(i) Sei $T : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ durch

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ 4a_{21} & 5a_{22} & 4a_{23} \\ 7a_{31} & a_{32} & 9a_{33} \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

(ii) Sei $M \in \mathbb{R}^{3\times3}$ durch

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

und $T_M : \mathbb{R}^{3\times3} \to \mathbb{R}^{3\times3}$ durch

$$T_M(A) = MA$$

gegeben. Finden Sie die Darstellungsmatrix von T_M bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

6. Seien $\mathcal{B}$ die Standardbasis für $\mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis für $\mathbb{R}^4$ und $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung mit

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$.

7. Für welche Werte von λ ist die reelle Matrix

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie A_λ^{-1} in diesen Fällen.

8. Für welche Werte von a, b ist die reelle Matrix

$$A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 7 & a & b \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie $A_{a,b}^{-1}$ in diesen Fällen.

9. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z + 2t &= 2, \\ 2x + 3t &= 0, \\ 3x + 10y + 12z + 6t &= 6, \\ 4x + 2y + 3z + 6t &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 3a + b - c &= 3, \\ a + 2b &= 2, \\ -2a - 3b + c &= -1. \end{aligned}$$

10. Für welche reellen Werte von λ, μ sind die linearen Gleichungssysteme

(a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x - y - z &= 0, \\ \lambda y + z &= 1, \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= \mu, \\ 2a + 1b + 3c &= \mu, \\ 2b + 2c &= 2 \end{aligned}$$

lösbar? Bestimmen Sie alle reellen Lösungen in diesen Fällen.

11. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Seien $n \in \mathbb{N}$, $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & b_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & b_2 \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & \ldots & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\det(G_n) = 1 - b_2 c_2 - \cdots - b_n c_n$$

für alle $n \geq 2$ gilt.

13. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der komplexen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

14. Prüfen Sie die Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

15. Sei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume von A_i für $i = 1, 2, 3$.

(ii) Finden Sie für $i = 1, 2, 3$ eine reelle, invertierbare Matrix P_i derart, dass $P_i^{-1} A_i P_i$ diagonal ist.

(iii) Geben Sie die Sylvestersche Normalform von A_i für $i = 1, 2, 3$ an.

16. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

linearunabhängig sind und berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis für den Unterraum $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$ und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^4$.

17. Finden Sie eine Orthonormalbasis für den Unterraum

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{C}^4$ und ergänzen Sie diese zu einer Orthonormalbasis für $\mathbb{C}^4$.

18. Seien

$$v_1(x) = 1, \qquad v_2(x) = (2x-1), \qquad v_3(x) = x\,(3x-2), \qquad v_4(x) = x^2\,(4x-3)$$

und $V = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ein Unteraum von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis des Unterraums V bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x, \qquad p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

19. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Element in $\mathrm{SO}(3)$ ist. Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel der durch A dargestellten Drehung.

20. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Element in $\mathrm{SO}(3)$ ist. Bestimmen Sie die Drehachse und den Drehwinkel der durch A dargestellten Drehung.

21. Skizzieren Sie die Kegelschnitte mit den Gleichungen

(i) $2y^2 - 8x = 0,$

(ii) $16x^2 - 9y^2 = 144,$

(iii) $4x^2 - 4x + 1 = 0,$

(iv) $xy - 4x + 2y - 4 = 0,$

(v) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 6y + 1 = 0,$

(vi) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 4y - 20 = 0,$

(vii) $4x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 4y + 3 = 0.$