UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
Fachrichtung 6.1 (Mathematik)
Prof. Dr. Mark Groves
MSc Jens Horn

Mathematik für Informatiker 2, SS 2018
Übungsblatt 10

---

1. Es sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Bestimmen Sie $\det(A_1)$ und $\det(A_2)$, finden Sie eine Formel für $\det(A_n)$ für $n \geq 3$ als Funktion von $\det(A_{n-1})$ und $\det(A_{n-2})$ und beweisen Sie durch starke Induktion, dass

$$\det(A_n) = n!, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der komplexen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 1-2\mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Es sei K ein Körper. Die *Spur* einer Matrix in $K^{n\times n}$ ist die Summe ihrer Hauptdiagonalenelemente.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spur} AB = \operatorname{Spur} BA$ für alle A, $B \in K^{n\times n}$, und dass zwei ähnliche Matrizen in $K^{n\times n}$ dieselbe Spur haben. Wie würden Sie die Spur einer linearen Abbildung $T : V \to V$ für einen n-dimensionalen Vektorraum V über K definieren?

(b) Es seien $A \in K^{n\times n}$ und c ihr charakteristisches Polynom. Zeigen Sie, dass

(i) die Koeffizient von λ^n in c gleich $(-1)^n$ ist,

(ii) die Koeffizient von λ^{n-1} in c gleich $(-1)^{n-1} \operatorname{Spur} A$ ist,

(iii) die Koeffizient von λ^0 in c gleich $\det A$ ist.

[Hinweis: Lesen Sie den Beweis, dass c ein Polynom vom Grad n ist.]